

УДК 621.771.01

Сатонин А. В.
Присяжный А. Г.
Спаская А. М.
Чуруканов А. С.

РАЗВИТИЕ ЧИСЛЕННЫХ ОДНОМЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ХОЛОДНОЙ ПРОКАТКЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОНКИХ ПОЛОС

Повышение требований к основным показателям качества холоднокатаных полос и, в частности, к точности их геометрических характеристик, делает необходимым оснащение непрерывных и реверсивных станов высокоэффективными системами автоматического регулирования толщины [1]. Отмеченное, в свою очередь, предъявляет дополнительные требования к математическому обеспечению данных систем как с точки зрения их трудоемкости и быстродействия численной реализации, так и с точки зрения объемов и степени достоверности предоставляемой информации.

В самом общем случае математические модели напряженно-деформированного состояния металла при холодной прокатке относительно тонких полос могут быть условно подразделены на инженерные, представляющих собой алгоритмическое сочетание аналитических зависимостей в их завершённой форме [2, 3] и на численные, основанные на разбиении очага деформации и организации последующих рекуррентных решений, исходя их различных предположений [4, 5]. При этом использование инженерных подходов, характеризующихся минимальной трудоемкостью и максимальным быстродействием, требует принятия целого ряда допущений, основными из которых являются упрощение геометрических форм очага деформации, а также усреднения показателей механических свойств прокатываемого металла и условий внешнего контактного трения. Отмеченное существенно снижает степень достоверности предоставляемых результатов, особенно с точки зрения локальных, то есть текущих по длине очага деформации, характеристик напряженно-деформированного состояния металла.

В свете изложенного выше особый интерес представляют численные одномерные по кинематике математические модели, основанные на разбиении всего объема очага деформации на конечное множество элементарных объемов и организации последующего рекуррентного решения конечно-разностных форм условия статико-динамического равновесия для каждого из них [4–7]. Использование численного подхода в этом случае позволяет достаточно строго учесть реальный характер распределений по длине очага деформации его геометрических параметров, механических свойств прокатываемого металла, а также условий внешнего контактного трения с учетом наличия зон отставания и опережения, протяженностями L_{om} и L_{on} , соответственно, (рис. 1). Вместе с тем многообразие аналитических описаний граничных условий очага деформации процесса холодной прокатки относительно тонких полос предопределяет и аналогичное многообразие соответствующих численных одномерных математических моделей, отличающихся между собой по композиционной сложности, трудоемкости численной реализации и степени достоверности предоставляемых результатов, требующей своей количественной оценки.

Целью работы является развитие численных одномерных математических моделей локальных и интегральных характеристик напряженно-деформированного состояния металла при холодной прокатке относительно тонких полос на основе уточнения граничных условий очага деформации.

При самой общей постановке численное математическое моделирование процесса холодной прокатки требует организации как минимум двух дополнительных итерационных процедур, первая из которых заключается в определении протяженностей зон отставания L_{om} и опережения L_{on} , исходя из условия равенства расчетных и заданных значений напряжений переднего σ_1 и заднего σ_0 натяжений (см. рис. 1, а), а вторая – в обеспечении учета упругого

сплющивания рабочих валков [5]. Вместе с тем необходимость в организации первой итерационной процедуры может быть исключена за счет дифференцированного расчета зоны отставания и зоны опережения при допущении о постоянстве величины коэффициента трения f_c по длине всего очага деформации. Согласно рекомендациям работы [5], текущее по длине зоны пластического формоизменения значение толщины прокатываемой полосы в этом случае может быть определено как:

$$h_x = h_1 + (h_0 - h_1)(x / L_{пл})^{a_h}, \quad (1)$$

где h_0, h_1 – исходное и конечное значения толщины прокатываемой полосы в данном проходе;

X – геометрическая координата противонаправленная перемещению металла и имеющая свое начало в плоскости сопряжения зон пластического формоизменения и упругого восстановления прокатываемой полосы;

$a_h \approx 2$ – степенной показатель, характеризующий аппроксимацию выпуклой формы контактных поверхностей рабочих валков.

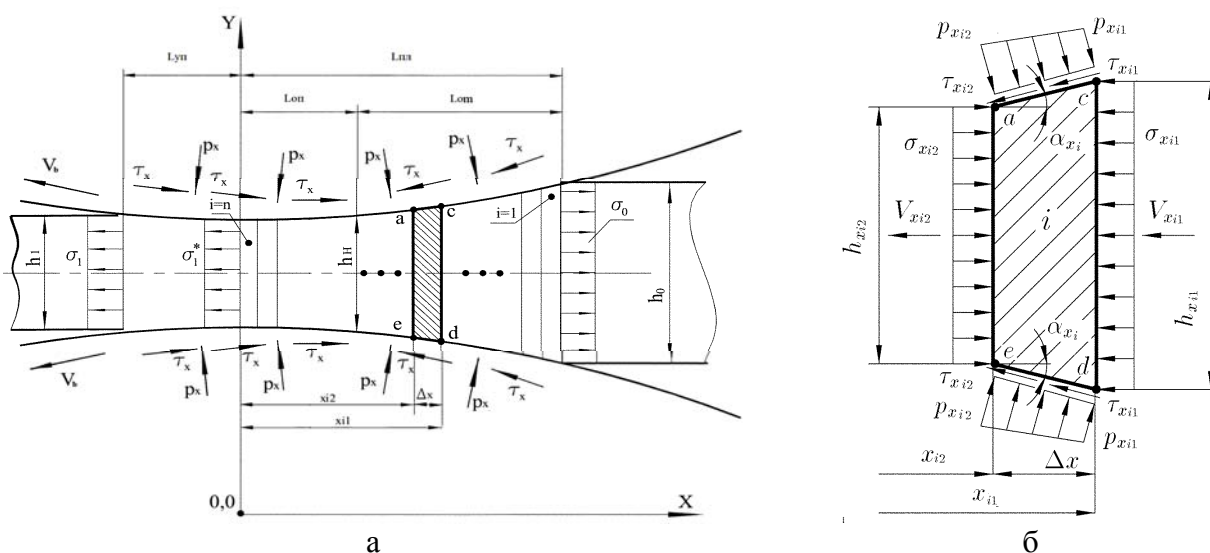


Рис. 1. Расчетные схемы интегрального очага деформации (а) и выделенного i -го элементарного объема зоны пластического формоизменения (б) применительно к одномерному численному математическому моделированию напряженно-деформированного состояния металла при холодной прокатке относительно тонких полос

Аналогично, следуя рекомендациям работы [5], может быть определено и текущее значение удвоенного сопротивления сдвигу прокатываемого металла:

$$2K_x = 1,155(\sigma_{m0} + a_1 \varepsilon_x + a_2 \varepsilon_x^2 + a_3 \varepsilon_x^3), \quad (2)$$

где σ_{m0} – напряжение текучести данного металла в его исходном, то есть отожжённом состоянии;

$\varepsilon_x = (H_0 - h_x) / H_0$ – текущее значение показателя степени деформации, определяемое текущим значением h_x и толщиной полосы в её отожжённом состоянии;

a_1, a_2, a_3 – коэффициенты регрессии полиномиального описания, характеризующего интенсивность деформационного упрочнения данного металла или сплава [5].

Помимо указанных выше в рамках численного одномерного математического моделирования был принят еще ряд допущений, основными из которых являются следующие:

- деформация полосы двумерная, установившаяся во времени, при этом пластическое течение металла подчиняется гипотезе плоских сечений;

- длины дуг контакта на противоположных рабочих валках – эквивалентны, перемещения переднего и заднего концов прокатываемой полосы – горизонтальны, а граничные сечения зон пластического и упругого формоизменения – вертикальны (см. рис. 1, а);

- протяженность зоны упругого сжатия в сечении на входе в рабочие валки, имеющая весьма незначительную величину, не превышает протяженности одного выделенного элементарного объема, получаемого путем разбиения протяженности всей зоны пластического формоизменения L_{nl} на их заданное достаточно большое количество n ;

- изменяясь по длине очага деформации нормальные осевые напряжения σ_x и удвоенные значения сопротивления сдвигу $2K_x$ по высоте каждого отдельного поперечного сечения остаются величинами постоянными;

- вследствие малых значений компонент девиатора напряжений применимым является инженерный вариант условия пластичности, характеризующий функциональную связь между нормальными контактными p_x и нормальными осевыми σ_x напряжениями как:

$$p_x = 2K_x + \sigma_x \text{ или } \sigma_x = p_x - 2K_x, \quad (3)$$

где за положительные значения нормальных контактных p_x и нормальных осевых напряжений σ_x приняты напряжения сжатия.

Осуществив с учетом принятых допущений разбиение всей протяженности зоны пластического формоизменения L_{nl} на конечное множество n элементарных объемов, имеющих порядковые номера $i = 1 \dots n$ (см. рис. 1), и выразив все силовые и геометрические компоненты в их конечно-разностной форме, рассмотрим условие статического равновесия i -го элементарного объема, выделенного в рамках зоны отставания:

$$\sigma_{xi2}h_{xi2} - \sigma_{xi1}h_{xi1} + (p_{xi1} + p_{xi2})(h_{xi1} - h_{xi2})/2 - (\tau_{xi1} + \tau_{xi2})\Delta x = 0, \quad (4)$$

где $h_{xi1}, h_{xi2}, \sigma_{xi1}, \sigma_{xi2}, p_{xi1}, p_{xi2}, \tau_{xi1}, \tau_{xi2}$ – толщина прокатываемой полосы, нормальные осевые, нормальные и касательные контактные напряжения, имеющие место, соответственно, в начальном cd (цифровой индекс 1) и конечном ae (цифровой индекс 2) граничных сечениях при этом характер их изменения $h_{xi} = h_{xi1} \dots h_{xi2}, \sigma_{xi} = \sigma_{xi1} \dots \sigma_{xi2}, p_{xi} = p_{xi1} \dots p_{xi2}, \tau_{xi} = \tau_{xi1} \dots \tau_{xi2}$ по длине каждого отдельного выделенного i -ого элементарного объема был принят линейным;

$\Delta x = L_{nl} / n$ – шаг разбиения зоны пластического формоизменения.

Исходя из принимаемого для численных одномерных математических моделей первого уровня закона Амонтона-Кулона $\tau_{xom} = p_x f_{om}$ и учитывая условие пластичности (3), выражение (4) можно трансформировать к виду:

$$(p_{xi2} - 2K_{xi2})h_{xi2} - \sigma_{xi1}h_{xi1} + (p_{xi1} + p_{xi2})(h_{xi1} - h_{xi2})/2 - (p_{xi1}f_{om} + p_{xi2}f_{om})\Delta x = 0, \quad (5)$$

где f_{om} – усредненное по длине зоны отставания значение коэффициента внешнего трения на контактных поверхностях рабочих валков и прокатываемой полосы.

Следуя известным в соответствии с организацией рекуррентной схемы решения значениям компонент напряженного состояния для начального граничного сечения $\sigma_{xi1} = \sigma_{x(i-1)2}; p_{xi1} = p_{x(i-1)2}$, а также известным в соответствии с (1) значениям h_{xi1}, h_{xi2} и, согласно (2) значениям $2K_{xi2}$ уравнение (5) содержит только одну неизвестную величину p_{xi2} , по отношению к которой в окончательном виде имеем:

$$p_{xi2om} = \frac{2(2K_{xi2}h_{xi2} + \sigma_{xi1}h_{xi1}) - p_{xi1}(h_{xi1} - h_{xi2} - 2f_{om}\Delta x)}{h_{xi1} - h_{xi2} - 2f_{om}\Delta x}. \quad (6)$$

Направление рекуррентной схемы решения для зоны отставания было принятым соответствующим направлению перемещения прокатываемой полосы, с учетом чего начальные условия и условия связи данной схемы имеют вид:

$$x_{i1}|_{i=1} = L_{n1}; \quad h_{xi1}|_{i=1} = h_0; \quad \sigma_{xi1}|_{i=1} = -\sigma_0; \quad p_{xi1}|_{i=1} = 0,0; \quad (7)$$

$$x_{i2} = x_{i1} - \Delta x; \quad x_{(i+1)1} = x_{i2}; \quad h_{x(i+1)1} = h_{xi2}; \quad \sigma_{x(i+1)1} = \sigma_{xi2}; \quad p_{x(i+1)1} = p_{xi2}. \quad (8)$$

Аналогично, учитывая противоположное направление рекуррентной схемы решения для зоны опережения, получим:

$$\sigma_{xi2}h_{xi2} - \sigma_{xi1}h_{xi1} + (p_{xi1} + p_{xi2})(h_{xi1} - h_{xi2})/2 + (\tau_{xi1} + \tau_{xi2})\Delta x = 0; \quad (9)$$

$$p_{xi1on} = \frac{2(2K_{xi1}h_{xi1} + \sigma_{xi2}h_{xi2}) + p_{xi2}(h_{xi1} - h_{xi2} + 2f_{on}\Delta x)}{h_{xi1} + h_{xi2} - 2f_{on}\Delta x}; \quad (10)$$

$$x_{i2}|_{i=n} = 0; \quad h_{xi2}|_{i=n} = h_1; \quad p_{xi2}|_{i=n} = 2K_{xi2}|_{i=n} + \sigma_{xi2}|_{i=n}; \quad (11)$$

$$x_{i1} = x_{i2} + \Delta x; \quad x_{(i-1)2} = x_{i2}; \quad h_{x(i-1)2} = h_{xi1}; \quad \sigma_{x(i-1)2} = \sigma_{xi1}; \quad p_{x(i-1)2} = p_{xi1}, \quad (12)$$

где f_{on} – усредненное по длине зоны опережения значение коэффициента внешнего трения на контактных поверхностях рабочих валков и прокатываемой полосы.

Учитывая наличие зоны упругого восстановления прокатываемой полосы в сечениях на выходе из рабочих валков (см. рис. 1, а), величина нормальных осевых напряжений $\sigma_{xi2}|_{i=n}$, знание которых согласно (11) необходимо в качестве начальных условий, может быть определена исходя из условий статического равновесия данной зоны:

$$\sigma_1 h_1 + \sigma_{xi2}|_{i=n} h_1 - 4p_{xi2}|_{i=n} f_{on} L_{yn} / 3 = 0, \quad (13)$$

где σ_1 – заданное значение напряжений переднего натяжения прокатываемой полосы.

Протяженность зоны упругого восстановления L_{yn} , в свою очередь, может быть определена, исходя из очевидного соотношения вида:

$$L_{yn} = \sqrt{R_\partial p_{xi2}|_{i=n} h_1 / E_n}, \quad (14)$$

где R_∂ – радиус упругодеформированных рабочих валков;

E_n – модуль упругости материала прокатываемой полосы.

С учетом выражения (14) и условия пластичности (3) уравнение (13) можно представить как:

$$\sigma_1 h_1 + (p_{xi2}|_{i=n} - 2K_{xi2}|_{i=n}) h_1 - 4p_{xi2}|_{i=n}^{3/2} f_{on} \sqrt{R_\partial h_1 / E_n} / 3 = 0, \quad (15)$$

что представляет собой уравнение третьей степени, решаемого по отношению $p_{xi2}|_{i=n}$, а вместе с этим и по отношению $\sigma_{xi2}|_{i=n} = p_{xi2}|_{i=n} - 2K_{xi2}|_{i=n}$ на основе известных и широко используемых методов расчета [8].

Помимо рекуррентного решения всей зоны пластического формоизменения с использованием зависимостей (6)–(15) и алгоритмического определения протяженности зоны опережения L_{on} , исходя из условия $p_{xom} = p_{xon}$, рассмотренная численная одномерная математическая модель первого уровня включала в себя численное интегрирование локальных характеристик напряженного состояния металла и итерационную процедуру по учету упругого сплющивания рабочих валков с определением значения их радиусов R_∂ в упругодеформированном состоянии.

Отличительной особенностью численной одномерной математической модели второго уровня является учет динамической составляющей, а также использование не усредненных, а переменных по длине зон отставания и опережения значений коэффициентов внешнего контактного трения, характеризуемых количественно степенными аналитическими зависимостями вида [5]:

$$f_x = f_{om0}[(x - L_{on}) / (L_{nl} - L_{on})]^{a_f} \quad \text{при } L_{on} \leq x \leq L_{nl}; \quad (16)$$

$$f_x = -f_{on0}[(L_{on} - x) / L_{on}]^{a_f} \quad \text{при } 0 \leq x < L_{on}, \quad (17)$$

где f_{om0} , f_{on0} – опорные значения коэффициентов внешнего трения в сечениях, соответственно, на входе и выходе из зоны пластического формоизменения металла;

a_f – степенной показатель, отображающий реальный характер изменения коэффициентов внешнего трения по длине очага деформации.

Единая для всей зоны пластического формоизменения металла конечно-разностная форма статико-динамического равновесия выделенного i -го элементарного объема (см. рис. 1, б) в этом случае имеет вид:

$$\sigma_{xi2}h_{xi2} - \sigma_{xi1}h_{xi1} + (p_{xi1} + p_{xi2})(h_{xi1} - h_{xi2})/2 - (p_{xi1}f_{xi1} + p_{xi2}f_{xi2})\Delta l + \rho_M(h_{xi1} + h_{xi2})\Delta x a_{xi} / 2 = 0, \quad (18)$$

где противонаправленность касательных контактных напряжений τ_x в зонах отставания и опережения учета знаками, используемыми в аналитических описаниях текущих значений коэффициентов внешнего трения (16), (17);

ρ_M – показатель плотности материала прокатываемой полосы;

a_{xi} – величина ускорения металла, имеющего место в рамках выделенного i -го элементарного объема и определяемая как: $a_{xi} = (V_{xi2}^2 - V_{xi1}^2) / (2\Delta x)$;

$V_{xi1} = V_1 h_1 / h_{xi1}$; $V_{xi2} = V_1 h_1 / h_{xi2}$ – скорости перемещения металла в начальном и конечном граничных сечениях выделенного i -го элементарного объема, функционально связанные посредством гипотезы плоских сечений со скоростью прокатки V_1 .

С учетом условия пластичности (3) и по аналогии с (4)–(6) решение уравнения (18) по отношению к искомому значению нормальных контактных напряжений p_{xi2} в окончательном виде можно представить как:

$$p_{xi2} = \frac{2(2K_{xi2}h_{xi2} + \sigma_{xi1}h_{xi1}) - p_{xi1}(h_{xi1} - h_{xi2} - 2f_{xi1}\Delta x) - \rho_M(h_{xi1} + h_{xi2})\Delta x a_{xi}}{h_{xi1} - h_{xi2} - 2f_{xi2}\Delta x}. \quad (19)$$

Помимо решения (19) для зоны пластического формоизменения, организации по аналогии с математической моделью первого уровня численного интегрирования и учета упругого сплющивания рабочих валков, одномерная математическая модель напряженно-деформированного состояния металла при холодной прокатке относительно тонких полос второго уровня включает в себя численное решение зоны упругого восстановления на основе обобщенного закона Гука и организацию дополнительной итерационной процедуры по определению протяженностей зон опережения L_{on} , обеспечивающих равенство заданных и расчетных напряжений переднего натяжения σ_l (см. рис. 1, а).

Зависимость (19) была использована и при разработке численных одномерных математических моделей третьего уровня, отличительной особенностью которых является использование не аппроксимирующего выражения (1), а более строгого решения И. Я. Штаермана о сжатии двух упругих тел, ограниченных наружными и внутренними цилиндрическими поверхностями эквивалентного радиуса, сочетающего в себе элементы теории Герца и гипотезу Винклера [5]. Применительно к условиям реализации процесса холодной прокатки величина упругого перемещения каждой отдельной точки контактной поверхности рабочего валка W_x согласно данному решению может быть определена как:

$$W_x = \frac{R}{E_\theta} \sum_{i=1}^m p_{xi} \left\{ -\frac{2(1-\omega_\theta^2)}{\pi} \left[1 + \cos(\varphi_x - \varphi_i) \ln \operatorname{tg} \frac{|\varphi_x - \varphi_i|}{2} \right] + \frac{(1+\omega_\theta)(1-2\omega_\theta)}{2} \sin|\varphi_x - \varphi_i| \right\} \Delta \varphi_i + K_{W\theta} p_{xi}, \quad (20)$$

где m – общее количество разбиений очага деформации, включающего в себя зоны и пластического, и упругого формоизменения металла прокатываемых полос;

$\omega_\epsilon, E_\epsilon$ – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала рабочих валков;

φ_x, φ_i – угловые характеристик, определяющие геометрические координаты рассматриваемой точки и каждого отдельного i -го элементарного объема;

$\Delta\varphi_i$ – шаг разбиения углов контакта, определяемый радиусами рабочих валков R и геометрическими параметрами каждого отдельного элементарного объема x_{i1} и x_{i2} очага деформации.

Как и в предыдущем случае, численная одномерная математическая модель третьего уровня включает в себя рекуррентные решения зоны упругого восстановления на основе обобщенного закона Гука, организацию численного интегрирования, а также организацию итерационных процедур по расчету протяженностей зон опережения и учету упругого сплющивания рабочих валков. Кроме того, математические модели второго и третьего уровней были дополнены расчетом текущих по длине очага деформации и результирующих показателей степени использования запаса пластичности прокатываемого металла, знание которых необходимо для проектирования рациональных технологических режимов процесса холодной прокатки и промежуточных отжигов.

В качестве примера результатов численной реализации рассмотренных математических моделей и соответствующих им программных средств на рис. 2 представлены расчетные распределения нормальных контактных p_x , нормальных осевых σ_x и касательных контактных τ_x напряжений, полученных применительно к эквивалентным условиям реализации процесса холодной прокатки относительно тонких полос.

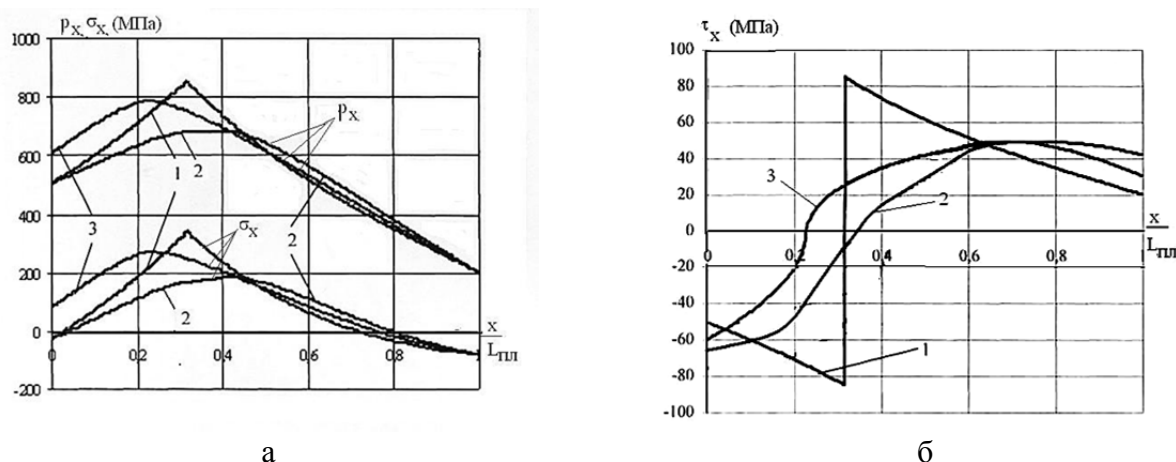


Рис. 2. Расчетные, согласно численным одномерным математическим моделям первого (1), второго (2) и третьего (3) уровней распределения по длине зоны пластического формоизменения нормальных контактных p_x и нормальных осевых σ_x (а), а также касательных контактных τ_x (б) напряжений, полученные применительно к холодной прокатке отожженных полос из стали 08кп:

$$h_0 = 2,0 \text{ мм}; h_1 = 1,4 \text{ мм}; R = 250 \text{ мм}; \sigma_0 = \sigma_1 = 80 \text{ МПа}$$

Анализ полученных результатов показал, что с точки зрения интегральных характеристик энергосиловых параметров влияние уровня рассмотренных численных математических моделей является незначительным. В частности, степень различия по силе прокатки в относительном измерении не превысила 8 %. С точки зрения локальных, т. е. текущих по длине очага деформации значений основных компонент напряженного состояния металла, рассматриваемая степень влияния является более существенным и может достигать 20–30 %. Еще более существенным указанное влияние имеет место по отношению к кинематическим параметрам и, в частности, по отношению к величине опережения.

Отмеченное подтверждает необходимость рационального выбора уровня математической модели процесса холодной прокатки относительно тонких полос с учетом специфики задач, решаемых в каждом конкретном случае. Конечно-разностные подходы, рассмотренные выше, были реализованы также и применительно к целому ряду других технологических схем обработки давлением, таких как процессы горячей листовой и сортовой прокатки, процессы плакирования, процессы прокатки многослойных полиметаллических листов и полос с изменяющимися по толщине механическими свойствами, процессы прокатки порошковых материалов, процессы волочения, листовой штамповки и другие. Более того, организация данных численных математических моделей в соответствии с элементами теории планируемого эксперимента, позволила получить максимально простые аналитические зависимости, отвечающих требованиям современных систем автоматического регулирования по быстродействию и объемам предоставляемой информации.

ВЫВОДЫ

Рассмотрены структуры численных одномерных конечно-разностных математических моделей процесса холодной прокатки относительно тонких полос, отличающиеся по объему и характеру используемых предпосылок и схеме последующего решения. Показано, что с точки зрения таких интегральных характеристик, как сила прокатки, влияние уровня используемой модели является незначительной, в то время как с точки зрения локальных характеристик напряженного состояния металла степень указанного влияния является весьма существенной, что предопределяет необходимость рационального выбора вида математических моделей, используемых в каждом конкретном случае.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов Ю. В. *Справочник прокатчика. Справочное издание в 2-х книгах. Книга 2. Производство холоднокатаных листов и полос* / Ю. В. Коновалов. – М. : Теплотехник, 2008. – 669 с.
2. Василев Я. Д. *Инженерные модели и алгоритмы расчета параметров холодной прокатки* / Я. Д. Василев. – М. : Металлургия, 1995. – 368 с.
3. Никитин, Г. С. *Теория непрерывной продольной прокатки : учебное пособие* / Г. С. Никитин. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2009. – 399 с.
4. Мазур В. Л. *Теория и технология тонколистовой прокатки (численный анализ и технические приложения)* / В. Л. Мазур, А. В. Ноговицын. – Днепропетровск : РВА «Дніпро-VAL», 2010. – 500 с.
5. Федоринов В. А. *Математическое моделирование напряжений, деформаций и основных показателей качества при прокатке относительно широких листов и полос : монография* / В. А. Федоринов, А. В. Сатонин, Э. П. Грибков. – Краматорск : ДГМА, 2010. – 243 с.
6. Мазур В. Л. *Рациональный метод расчета на ЭВМ параметров тонколистовой прокатки* / В. Л. Мазур, А. В. Ноговицын, А. Н. Добронравов // *Известия вузов. Черная металлургия.* – 1977. – № 2. – С. 54–59.
7. Сатонин А. В. *Численное конечно-разностное математическое моделирование напряженно-деформированного состояния металла при реализации различных технологических схем обработки давлением* / А. В. Сатонин // *Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні : зб. наук. пр.* – Краматорськ : ДДМА, 2001. – С. 559–564.
8. Бронштейн И. Н. *Справочник по математике (для инженеров и учащихся вузов)* / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1981. – 720 с.

Сатонин А. В. – д-р техн. наук, проф. каф. АММ ДГМА;

Присяжный А. Г. – ст. преп. ПГТУ;

Спаская А. М. – аспирант ДГМА;

Чуруканов А. С. – ассистент каф. АММ ДГМА.

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

ПГТУ – Приазовский государственный технический университет, г. Мариуполь.

E-mail: amm@dgma.donetsk.ua; andrejprisyazhnyj@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 07.03.2012 г.